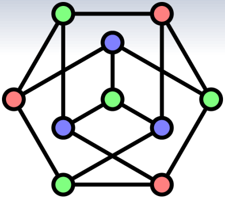


Partition arbitraire et préaffectation de sommets

Julien Bensmail

GT Graphes et Applications - 21 octobre 2011

LaBRI, Université de Bordeaux

Problématique initiale

On souhaite partager un réseau de ressources connectées entre un nombre arbitraire d'utilisateurs, et ce en respectant les contraintes suivantes :

- $\rightarrow$ Une ressource ne peut être atribuée qu'à un unique utilisateur.
- $\rightarrow$ Deux ressources d'un même sous-réseau doivent pouvoir communiquer entre elles au sein de celui-ci.

Problématique initiale

On souhaite partager un réseau de ressources connectées entre un nombre arbitraire d'utilisateurs, et ce en respectant les contraintes suivantes :

- → Une ressource ne peut être atribuée qu'à un unique utilisateur.
- → Deux ressources d'un même sous-réseau doivent pouvoir communiquer entre elles au sein de celui-ci.

Difficulté : le nombre d'utilisateurs ainsi que leurs besoins ne sont pas connus à l'avance !

Problématique initiale

On souhaite partager un réseau de ressources connectées entre un nombre arbitraire d'utilisateurs, et ce en respectant les contraintes suivantes :

- → Une ressource ne peut être atribuée qu'à un unique utilisateur.
- → Deux ressources d'un même sous-réseau doivent pouvoir communiquer entre elles au sein de celui-ci.

Difficulté : le nombre d'utilisateurs ainsi que leurs besoins ne sont pas connus à l'avance !

On s'intéresse donc aux réseaux que l'on peut découper en un nombre arbitraire de sous-réseaux de taille arbitraire tout en respectant les contraintes énoncées ci-dessus.

Formalisation

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n.

Formalisation

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n.

On considère $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ une partition de n composée d'entiers strictement positifs, avec $\tau_1 \geq \ldots \geq \tau_k$.

Formalisation

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n.

On considère $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ une partition de n composée d'entiers strictement positifs, avec $\tau_1 \geq \ldots \geq \tau_k$.

La partition τ est dite *réalisable dans G* s'il est possible de partitionner V en k parts $V_1, \ldots, V_k$ de sorte que $\forall i \in [1, k]$, $G[V_i]$ soit connexe et d'ordre τ_i.

Formalisation

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n.

On considère $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ une partition de n composée d'entiers strictement positifs, avec $\tau_1 \geq \ldots \geq \tau_k$.

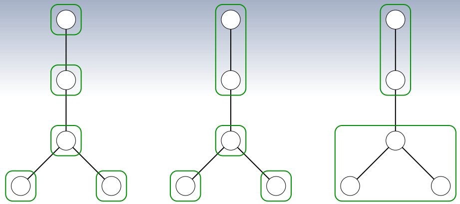
La partition τ est dite *réalisable dans* G s'il est possible de partitionner V en k parts $V_1, \ldots, V_k$ de sorte que $\forall i \in [1, k]$, $G[V_i]$ soit connexe et d'ordre τ_i.

Finalement, les réseaux nous intéressant vis-à-vis de notre problématique sont ceux dont la topologie forme un graphe *arbitrairement partitionnable :*

Le graphe G est dit *arbitrairement partitionnable* (AP) si toute partition de n y est réalisable.

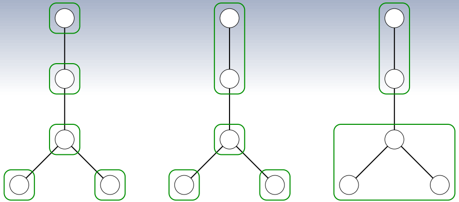
Exemples

Quelques réalisations dans le graphe $P(1, 1, 2)$:

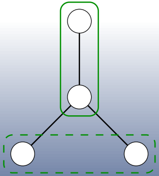


Exemples

Quelques réalisations dans le graphe $P(1,1,2)$:



Le cas de $P(1,1,1)$:



Intérêts

La partition arbitraire d'un graphe est utile à plusieurs titres...

→ Diverses applications concrètes.

Intérêts

La partition arbitraire d'un graphe est utile à plusieurs titres...

$\rightarrow$ Diverses applications concrètes.

$\rightarrow$ Toute réalisation de la partition $(2, \dots, 2)$ (resp. $(2, \dots, 2, 1)$ si n est impair) dans un graphe forme un *couplage parfait* (resp. *quasi parfait*) dans celui-ci.

$\rightarrow$ Tout graphe *traçable* est trivialement AP.

Intérêts

La partition arbitraire d'un graphe est utile à plusieurs titres...

- $\rightarrow$ Diverses applications concrètes.
- $\rightarrow$ Toute réalisation de la partition $(2, \dots, 2)$ (resp. $(2, \dots, 2, 1)$ si n est impair) dans un graphe forme un *couplage parfait* (resp. *quasi parfait*) dans celui-ci.
- $\rightarrow$ Tout graphe *traçable* est trivialement AP.

...mais elle est généralement difficile à déterminer !

- $\rightarrow$ Savoir si une partition est réalisable dans un graphe est NPC [Rob98].
- $\rightarrow$ Le nombre de partitions d'un entier est exponentiel en sa taille [FS09].

Résultats antérieurs principaux

Diverses orientations ont été considérées pour étudier les graphes AP en dépit de la complexité apparente :

Résultats antérieurs principaux

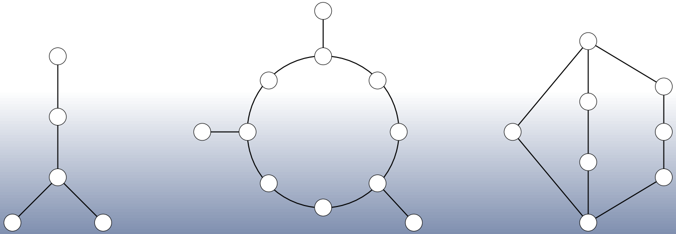
Diverses orientations ont été considérées pour étudier les graphes AP en dépit de la complexité apparente :

→ Introduction de différentes versions de la partition arbitraire ajoutant des contraintes sur les sous-graphes induits par la réalisation d'une partition dans un graphe (récursives, à la volée, etc.).

Résultats antérieurs principaux

Diverses orientations ont été considérées pour étudier les graphes AP en dépit de la complexité apparente :

- → Introduction de différentes versions de la partition arbitraire ajoutant des contraintes sur les sous-graphes induits par la réalisation d'une partition dans un graphe (récursives, à la volée, etc.).
- → Toutes ces versions ont surtout été étudiées dans le cadre de classes simples de graphes telles que les tripodes, les soleils, ou les ballons.



Résultats antérieurs principaux

Diverses orientations ont été considérées pour étudier les graphes AP en dépit de la complexité apparente :

- → Introduction de différentes versions de la partition arbitraire ajoutant des contraintes sur les sous-graphes induits par la réalisation d'une partition dans un graphe (récursives, à la volée, etc.).
- → Toutes ces versions ont surtout été étudiées dans le cadre de classes simples de graphes telles que les tripodes, les soleils, ou les ballons.

Un résultat important dont nous allons avoir besoin :

Théorème [Barth et Fournier, 2006 [BF06]]

Un arbre AP est de degré maximum au plus quatre. De plus, tout nœud de degré 4 d'un tel arbre est nécessairement adjacent à une feuille.

Idée initiale

Idée basée sur le théorème suivant assurant que les graphes k-connexes peuvent toujours être partitionnés en k parts "centrées" autour de sommets préalablement choisis :

Théorème [Lovàsz, 1977 [Lov77] - Györi, 1978 [Gyo78]]

Soient G un graphe k-connexe d'ordre n, une partition $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ de n, et $v_1, \ldots, v_k$ des sommets distincts deux à deux de G. Il existe nécessairement une réalisation $V_1, \ldots, V_k$ de τ dans G telle que $\forall i \in [1, k]$, $v_i \in V_i$.

Idée initiale

Idée basée sur le théorème suivant assurant que les graphes k-connexes peuvent toujours être partitionnés en k parts "centrées" autour de sommets préalablement choisis :

Théorème [Lovàsz, 1977 [Lov77] - Györi, 1978 [Gyo78]]

Soient G un graphe k-connexe d'ordre n, une partition $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ de n, et $v_1, \ldots, v_k$ des sommets distincts deux à deux de G. Il existe nécessairement une réalisation $V_1, \ldots, V_k$ de τ dans G telle que $\forall i \in [1, k]$, $v_i \in V_i$.

Question : est-il toujours possible de réaliser une partition donnée dans un graphe AP de sorte qu'un sommet particulier appartienne à la part de telle ou telle taille ?

Formalisation

On s'intéresse ici à une version plus forte de cette idée.

Formalisation

On s'intéresse ici à une version plus forte de cette idée.

Soit $q \in [1, n]$ un entier strictement positif, et $v \in V$ un sommet de G. Le sommet v est dit *q-fixable* dans G s'il existe un sous-ensemble de sommets $S_q \subseteq V$ tel que :

- → $v \in S_q$,
- → $|S_q| = q$,
- → $G[S_q]$ est connexe,
- → $G[V \setminus S_q]$ est AP.

Formalisation

On s'intéresse ici à une version plus forte de cette idée.

Soit $q \in [1, n]$ un entier strictement positif, et $v \in V$ un sommet de G. Le sommet v est dit *q-fixable* dans G s'il existe un sous-ensemble de sommets $S_q \subseteq V$ tel que :

- $\rightarrow$ $v \in S_q$,
- $\rightarrow$ $|S_q| = q$,
- $\rightarrow$ $G[S_q]$ est connexe,
- $\rightarrow$ $G[V \setminus S_q]$ est AP.

Le fait qu'un graphe possède un sommet q-fixable pour tout $q \in [1, n]$ entraîne sa partition arbitraire !

Formalisation

On s'intéresse ici à une version plus forte de cette idée.

Soit $q \in [1, n]$ un entier strictement positif, et $v \in V$ un sommet de G. Le sommet v est dit *q-fixable* dans G s'il existe un sous-ensemble de sommets $S_q \subseteq V$ tel que :

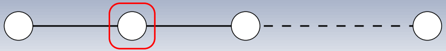
- → $v \in S_q$,
- → $|S_q| = q$,
- → $G[S_q]$ est connexe,
- → $G[V \setminus S_q]$ est AP.

Le fait qu'un graphe possède un sommet q-fixable pour tout $q \in [1, n]$ entraîne sa partition arbitraire !

Le graphe G est dit *arbitrairement partitionnable avec une préaffectation* (AP+1) si chacun de ses sommets est q-fixable pour tout $q \in [1, n]$.

Premières observations

Une chaîne n'est pas AP+1 si elle possède plus de trois sommets :



Premières observations

Une chaîne n'est pas AP+1 si elle possède plus de trois sommets :

Premières observations

Une chaîne n'est pas AP+1 si elle possède plus de trois sommets :

→ Les graphes traçables ne sont pas forcément AP+1.

Premières observations

Une chaîne n'est pas AP+1 si elle possède plus de trois sommets :

→ Les graphes traçables ne sont pas forcément AP+1.

→ Un sommet d'articulation n'est pas 1-fixable.

Premières observations

Une chaîne n'est pas AP+1 si elle possède plus de trois sommets :

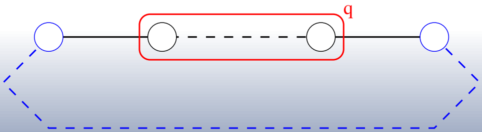
- → Les graphes traçables ne sont pas forcément AP+1.
- → Un sommet d'articulation n'est pas 1-fixable.
- → Les graphes AP+1 sont donc **2-connexes** !

Premières observations

Une chaîne n'est pas AP+1 si elle possède plus de trois sommets :

- → Les graphes traçables ne sont pas forcément AP+1.
- → Un sommet d'articulation n'est pas 1-fixable.
- → Les graphes AP+1 sont donc **2-connexes** !

En revanche, les cycles n'ont pas ce problème :

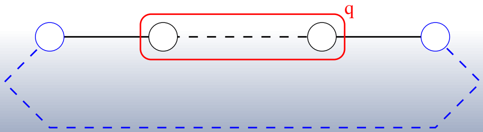


Premières observations

Une chaîne n'est pas AP+1 si elle possède plus de trois sommets :

- → Les graphes traçables ne sont pas forcément AP+1.
- → Un sommet d'articulation n'est pas 1-fixable.
- → Les graphes AP+1 sont donc **2-connexes** !

En revanche, les cycles n'ont pas ce problème :



Tout graphe hamiltonien est donc AP+1 !

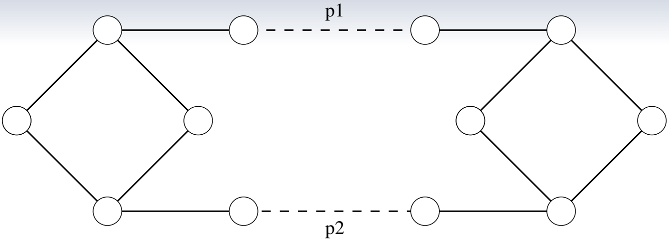
Une autre famille de graphes AP+1

Tous les graphes AP+1 sont-ils nécessairement hamiltoniens ?

Une autre famille de graphes AP+1

Tous les graphes AP+1 sont-ils nécessairement hamiltoniens ?

On introduit la classe des *cylindres* :

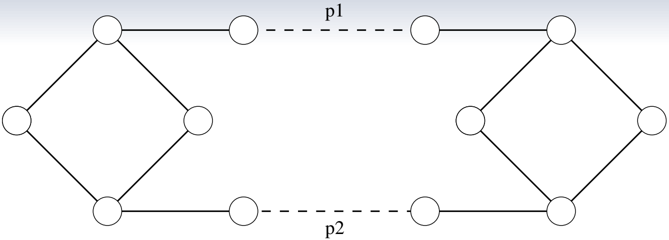


Le cylindre $C(p_1, p_2)$

Une autre famille de graphes AP+1

Tous les graphes AP+1 sont-ils nécessairement hamiltoniens ?

On introduit la classe des *cylindres* :



Le cylindre $C(p_1, p_2)$

Théorème

Soit $p \geq 1$ un entier. Le cylindre $C(p, p)$ est AP+1 ssi p est pair.

À propos de la classe des ballons

Les ballons potentiellement AP+1 possèdent au plus *quatre* branches !

À propos de la classe des ballons

Les ballons potentiellement AP+1 possèdent au plus *quatre* branches !

$\rightarrow$ Les 2-ballons le sont tous (cycles) ;

$\rightarrow$ Les 3-ballons ne le sont pas tous (voir $B(1,1,1)$ et $B(1,1,2)$) ;

$\rightarrow$ Quid des 4-ballons ?

À propos de la classe des ballons

Les ballons potentiellement AP+1 possèdent au plus *quatre* branches !

→ Les 2-ballons le sont tous (cycles) ;

→ Les 3-ballons ne le sont pas tous (voir $B(1,1,1)$ et $B(1,1,2)$) ;

→ Quid des 4-ballons ?

Propriétés

Si le 4-ballon $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$ est AP+1, alors :

→ $b_1 = 1$,

→ $P(1, b_2, b_3, b_4)$ est AP,

→ $P(b_2, b_3, b_4)$ est AP,

→ $\mathrm{pgcd}(b_2 + 1, b_3 + b_4 + 1) = 1$,

→ au moins deux valeurs de l'ensemble $\{b_2, b_3, b_4\}$ sont paires,

→ au moins une valeur de l'ensemble $\{b_2, b_3, b_4\}$ est un multiple de 4.

Conclusions et perspectives

Nous avons introduit une version plus forte de la partition arbitraire...

$\rightarrow$ Relation avec la version standard déjà étudiée ?

$\rightarrow$ Préaffectation de davantage de sommets ?

Conclusions et perspectives

Nous avons introduit une version plus forte de la partition arbitraire...

- $\rightarrow$ Relation avec la version standard déjà étudiée ?
- $\rightarrow$ Préaffectation de davantage de sommets ?

...et l'avons étudiée dans le cadre de quelques classes de graphes.

- $\rightarrow$ Existence de 4-ballons AP+1 ?
- $\rightarrow$ Extension de nos résultats à des classes de graphes plus générales ?
- $\rightarrow$ Conditions nécessaires pour qu'un graphe soit AP+1 ?

Références

D. Barth and H. Fournier.
A degree bound on decomposable trees.
Discrete Mathematics, 306(5) :469–477, 2006.

P. Flajolet and R. Sedgewick.
Analytic combinatorics.
Cambridge University Press, 2009.

E. Gyori.
On division of graphs to connected subgraphs.
In *Combinatorics*, pages 485–494, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 18, 1978.

L. Lovász.
A homology theory for spanning trees of a graph.
Acta mathematica academiae scientiarum Hungaricae, 30(3-4) :241–251, 1977.

M. Robson.
Communication privée, 1998.

Merci pour l'attention !

Des questions ?