Partition arbitraire et préaffectation de sommets

J. Bensmail

LaBRI, Université de Bordeaux

JGA'11

16 Novembre 2011

Problématique initiale

On souhaite partager un réseau de ressources connectées entre un nombre arbitraire d'utilisateurs, et ce en respectant les contraintes suivantes :

- $\rightarrow$ Une ressource ne peut être atribuée qu'à un unique utilisateur.
- $\rightarrow$ Deux ressources d'un même sous-réseau doivent pouvoir communiquer au sein de celui-ci.

Problématique initiale

On souhaite partager un réseau de ressources connectées entre un nombre arbitraire d'utilisateurs, et ce en respectant les contraintes suivantes :

- → Une ressource ne peut être atribuée qu'à un unique utilisateur.
- → Deux ressources d'un même sous-réseau doivent pouvoir communiquer au sein de celui-ci.

Difficulté : le nombre d'utilisateurs ainsi que leurs besoins ne sont pas connus à l'avance !

Problématique initiale

On souhaite partager un réseau de ressources connectées entre un nombre arbitraire d'utilisateurs, et ce en respectant les contraintes suivantes :

- → Une ressource ne peut être atribuée qu'à un unique utilisateur.
- → Deux ressources d'un même sous-réseau doivent pouvoir communiquer au sein de celui-ci.

Difficulté : le nombre d'utilisateurs ainsi que leurs besoins ne sont pas connus à l'avance !

On s'intéresse donc aux réseaux que l'on peut découper en un nombre arbitraire de sous-réseaux de taille arbitraire tout en respectant les contraintes énoncées ci-dessus.

Formalisation

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n.

Formalisation

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n.

On considère $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ une partition de n composée d'entiers strictement positifs, avec $\tau_1 \geq \ldots \geq \tau_k$.

Formalisation

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n.

On considère $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ une partition de n composée d'entiers strictement positifs, avec $\tau_1 \geq \ldots \geq \tau_k$.

La partition τ est dite *réalisable dans* G s'il est possible de partitionner V en k parts $(V_1, \ldots, V_k)$ de sorte que $\forall i \in [1, k]$, $G[V_i]$ soit connexe et d'ordre τ_i.

Formalisation

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n.

On considère $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ une partition de n composée d'entiers strictement positifs, avec $\tau_1 \geq \ldots \geq \tau_k$.

La partition τ est dite *réalisable dans G* s'il est possible de partitionner V en k parts $(V_1, \ldots, V_k)$ de sorte que $\forall i \in [1, k]$, $G[V_i]$ soit connexe et d'ordre τ_i.

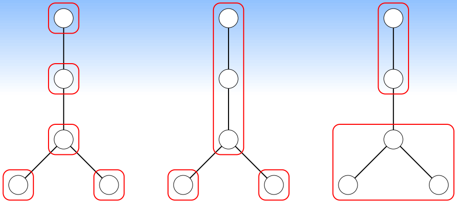
Finalement, les réseaux nous intéressant vis-à-vis de notre problématique sont ceux dont la topologie forme un graphe *arbitrairement partitionnable :*

Définition

Le graphe G est dit *arbitrairement partitionnable* (AP) si toute partition de n y est réalisable.

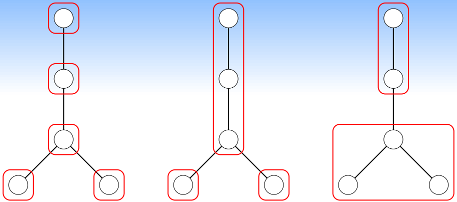
Exemples

Quelques réalisations dans le graphe $P(1,1,2)$:

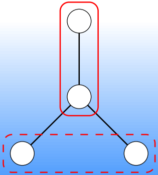


Exemples

Quelques réalisations dans le graphe $P(1,1,2)$:



Le cas de $P(1,1,1)$:



Intérêts

La partition arbitraire d'un graphe est utile à plusieurs titres...

→ Diverses applications concrètes.

Intérêts

La partition arbitraire d'un graphe est utile à plusieurs titres...

- → Diverses applications concrètes.
- → Toute réalisation de la partition $(2, \ldots, 2)$ (resp. $(2, \ldots, 2, 1)$ si n est impair) dans un graphe forme un *couplage parfait* (resp. *quasi parfait*) dans celui-ci.
- → Tout graphe *traçable* est trivialement AP.

Intérêts

La partition arbitraire d'un graphe est utile à plusieurs titres...

- → Diverses applications concrètes.
- → Toute réalisation de la partition $(2, \ldots, 2)$ (resp. $(2, \ldots, 2, 1)$ si n est impair) dans un graphe forme un *couplage parfait* (resp. *quasi parfait*) dans celui-ci.
- → Tout graphe *traçable* est trivialement AP.

... mais elle est généralement difficile à déterminer !

- → On ne connaît pas la complexité du problème...
- → Savoir si une partition est réalisable dans un graphe est NPC [Rob98].
- → Le nombre de partitions d'un entier est exponentiel en celui-ci [FS09].

Idée initiale

Nous nous sommes inspirés du théorème suivant assurant que les graphes k-connexes peuvent toujours être partitionnés en k parts, et ce même en imposant k *restrictions sommet-part* :

Théorème [Lovàsz, 1977 [Lov77] - Györi, 1978 [Gyo78]]

Soient G un graphe k-connexe d'ordre n, une partition $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ de n, et $v_1, \ldots, v_k$ des sommets distincts de G. Il existe nécessairement une réalisation $(V_1, \ldots, V_k)$ de τ dans G telle que $\forall i \in [1, k]$, $v_i \in V_i$.

Idée initiale

Nous nous sommes inspirés du théorème suivant assurant que les graphes k-connexes peuvent toujours être partitionnés en k parts, et ce même en imposant k *restrictions sommet-part* :

Théorème [Lovàsz, 1977 [Lov77] - Györi, 1978 [Gyo78]]

Soient G un graphe k-connexe d'ordre n, une partition $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ de n, et $v_1, \ldots, v_k$ des sommets distincts de G. Il existe nécessairement une réalisation $(V_1, \ldots, V_k)$ de τ dans G telle que $\forall i \in [1, k]$, $v_i \in V_i$.

Question : est-il toujours possible de réaliser une partition donnée dans un graphe AP de manière à respecter un certain nombre de telles restrictions ?

Formalisation

Étant donnée une partition $\tau = (\tau_1, ..., \tau_k)$ de n, une *restriction sommet-part* (v, τ_i) est un élément de $V \times \tau$.

Formalisation

Étant donnée une partition $\tau = (\tau_1, ..., \tau_k)$ de n, une *restriction sommet-part* (v, τ_i) est un élément de $V \times \tau$.

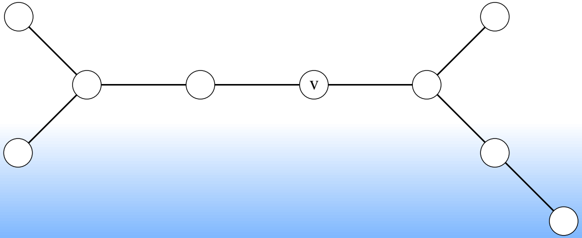
On dit que τ est *réalisable dans G sous* (v, τ_i) s'il existe une réalisation de τ dans G telle que v appartienne à une part de taille τ_i.

Formalisation

Étant donnée une partition $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ de n, une *restriction sommet-part* (v, τ_i) est un élément de $V \times \tau$.

On dit que τ est *réalisable dans* G *sous* (v, τ_i) s'il existe une réalisation de τ dans G telle que v appartienne à une part de taille τ_i.

Exemple : réalisation de $(4, 3, 2)$ sous $(v, 2)$ dans le graphe suivant ?

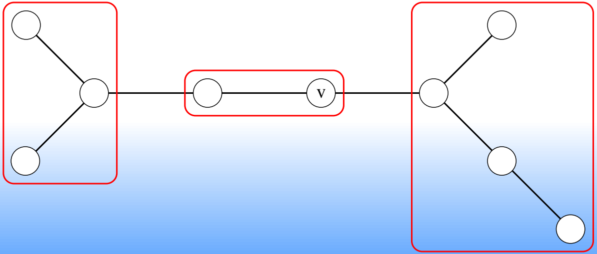


Formalisation

Étant donnée une partition $\tau = (\tau_1, ..., \tau_k)$ de n, une *restriction sommet-part* (v, τ_i) est un élément de $V \times \tau$.

On dit que τ est *réalisable dans G sous* (v, τ_i) s'il existe une réalisation de τ dans G telle que v appartienne à une part de taille τ_i.

Exemple : réalisation de $(4, 3, 2)$ sous $(v, 2)$ dans le graphe suivant ? Ok !

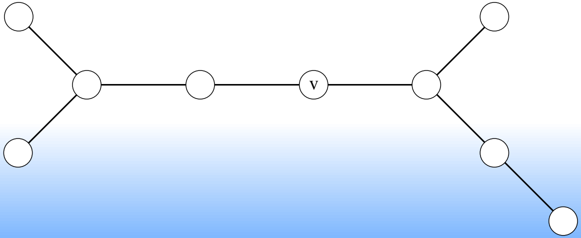


Formalisation

Étant donnée une partition $\tau = (\tau_1, ..., \tau_k)$ de n, une *restriction sommet-part* (v, τ_i) est un élément de $V \times \tau$.

On dit que τ est *réalisable dans G sous* (v, τ_i) s'il existe une réalisation de τ dans G telle que v appartienne à une part de taille τ_i.

Exemple : réalisation de $(5, 2, 2)$ sous $(v, 2)$ dans le même graphe ?

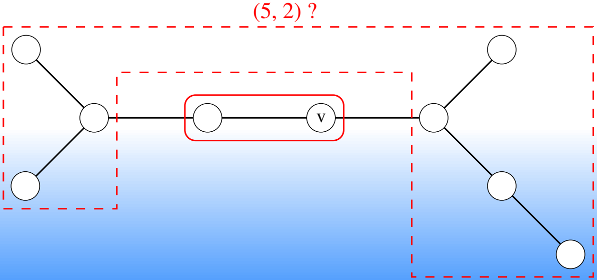


Formalisation

Étant donnée une partition $\tau = (\tau_1, ..., \tau_k)$ de n, une *restriction sommet-part* (v, τ_i) est un élément de $V \times \tau$.

On dit que τ est *réalisable dans G sous (v, τ_i)* s'il existe une réalisation de τ dans G telle que v appartienne à une part de taille τ_i.

Exemple : réalisation de $(5, 2, 2)$ sous $(v, 2)$ dans le même graphe ? Non...

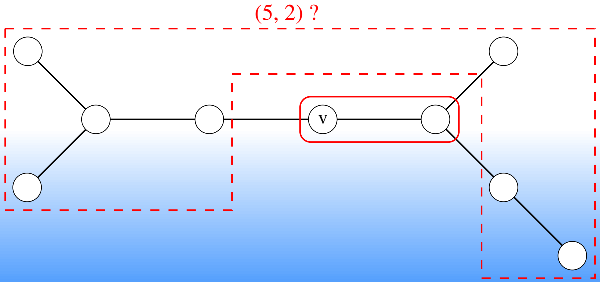


Formalisation

Étant donnée une partition $\tau = (\tau_1, ..., \tau_k)$ de n, une *restriction sommet-part* (v, τ_i) est un élément de $V \times \tau$.

On dit que τ est *réalisable dans G sous* (v, τ_i) s'il existe une réalisation de τ dans G telle que v appartienne à une part de taille τ_i.

Exemple : réalisation de $(5, 2, 2)$ sous $(v, 2)$ dans le même graphe ? Non !



Formalisation

Étant donnée une partition $\tau = (\tau_1, ..., \tau_k)$ de n, une *restriction sommet-part* (v, τ_i) est un élément de $V \times \tau$.

On dit que τ est *réalisable dans G sous* (v, τ_i) s'il existe une réalisation de τ dans G telle que v appartienne à une part de taille τ_i.

Définition

Le graphe G est dit *arbitrairement partitionnable sous une restriction* (wAP+1) si toute partition τ de n est réalisable dans celui-ci sous n'importe quelle restriction de $V \times \tau$.

Une contrainte plus forte

Observons que la part de taille τ_i contenant v d'une réalisation de τ dans G sous (v, τ_i) peut différer de celle d'une réalisation de τ' dans le même graphe sous la même restriction. Il serait plus simple de pouvoir toujours prendre la même part...

Une contrainte plus forte

Observons que la part de taille τ_i contenant v d'une réalisation de τ dans G sous (v, τ_i) peut différer de celle d'une réalisation de τ' dans le même graphe sous la même restriction. Il serait plus simple de pouvoir toujours prendre la même part...

Soient $q \in [1, n]$ un entier positif, et v un sommet de G. Le sommet v est dit *q-fixable dans G* s'il existe un sous-ensemble $S_q \subseteq V$ tel que :

→ $v \in S_q$,

→ $|S_q| = q$,

→ $G[S_q]$ est connexe,

→ $G[V \setminus S_q]$ est AP.

Une contrainte plus forte

Observons que la part de taille τ_i contenant v d'une réalisation de τ dans G sous (v, τ_i) peut différer de celle d'une réalisation de τ' dans le même graphe sous la même restriction. Il serait plus simple de pouvoir toujours prendre la même part...

Soient $q \in [1, n]$ un entier positif, et v un sommet de G. Le sommet v est dit *q-fixable dans G* s'il existe un sous-ensemble $S_q \subseteq V$ tel que :

→ $v \in S_q$,

→ $|S_q| = q$,

→ $G[S_q]$ est connexe,

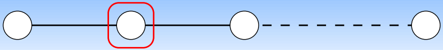
→ $G[V \setminus S_q]$ est AP.

Définition

Le graphe G est dit *fortement arbitrairement partitionnable sous une restriction* (sAP+1) si chacun de ses sommets est q-fixable pour tout $q \in [1, n]$.

Premières observations

Une chaîne n'est pas sAP+1 si elle possède plus de trois sommets :



Premières observations

Une chaîne n'est pas sAP+1 si elle possède plus de trois sommets :

Premières observations

Une chaîne n'est pas sAP+1 si elle possède plus de trois sommets :

→ Les graphes traçables ne sont pas forcément sAP+1.

Premières observations

Une chaîne n'est pas sAP+1 si elle possède plus de trois sommets :

→ Les graphes traçables ne sont pas forcément sAP+1.

→ Un sommet d'articulation n'est pas 1-fixable.

Premières observations

Une chaîne n'est pas sAP+1 si elle possède plus de trois sommets :

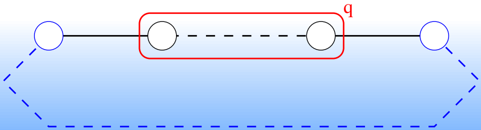
- → Les graphes traçables ne sont pas forcément sAP+1.
- → Un sommet d'articulation n'est pas 1-fixable.
- → Les graphes sAP+1 sont donc **2-connexes** !

Premières observations

Une chaîne n'est pas sAP+1 si elle possède plus de trois sommets :

- → Les graphes traçables ne sont pas forcément sAP+1.
- → Un sommet d'articulation n'est pas 1-fixable.
- → Les graphes sAP+1 sont donc **2-connexes** !

En revanche, les cycles n'ont pas ce problème :



Premières observations

Une chaîne n'est pas sAP+1 si elle possède plus de trois sommets :

- → Les graphes traçables ne sont pas forcément sAP+1.
- → Un sommet d'articulation n'est pas 1-fixable.
- → Les graphes sAP+1 sont donc **2-connexes** !

En revanche, les cycles n'ont pas ce problème :

Tout graphe hamiltonien est donc sAP+1 !

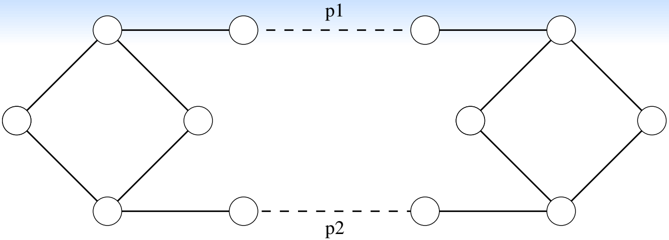
Une autre famille de graphes sAP+1

Tous les graphes sAP+1 sont-ils nécessairement hamiltoniens ?

Une autre famille de graphes sAP+1

Tous les graphes sAP+1 sont-ils nécessairement hamiltoniens ?

On introduit la classe des *cylindres* :

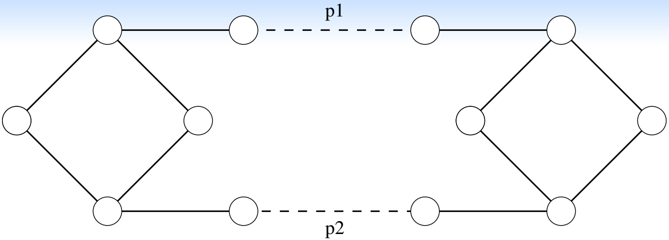


Le cylindre $C(p_1, p_2)$

Une autre famille de graphes sAP+1

Tous les graphes sAP+1 sont-ils nécessairement hamiltoniens ?

On introduit la classe des *cylindres* :



Le cylindre $C(p_1, p_2)$

Théorème

Soit $p \geq 1$ un entier. Le cylindre $C(p, p)$ est sAP+1 ssi p est pair.

À propos de la classe des ballons

Les ballons potentiellement sAP+1 possèdent au plus *quatre* branches !

À propos de la classe des ballons

Les ballons potentiellement sAP+1 possèdent au plus *quatre* branches !

- $\rightarrow$ Les 2-ballons le sont tous (cycles) ;
- $\rightarrow$ Les 3-ballons ne le sont pas tous (voir $B(1,1,1)$ et $B(1,1,2)$) ;
- $\rightarrow$ Quid des 4-ballons ?

À propos de la classe des ballons

Les ballons potentiellement sAP+1 possèdent au plus *quatre* branches !

→ Les 2-ballons le sont tous (cycles) ;

→ Les 3-ballons ne le sont pas tous (voir $B(1,1,1)$ et $B(1,1,2)$) ;

→ Quid des 4-ballons ?

Propriétés

Si le 4-ballon $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$ est sAP+1, alors :

→ $b_1 = 1$,

→ $P(1, b_2, b_3, b_4)$ est AP,

→ $P(b_2, b_3, b_4)$ est AP,

→ $\mathrm{pgcd}(b_2 + 1, b_3 + b_4 + 1) = 1$,

→ au moins deux valeurs de l'ensemble $\{b_2, b_3, b_4\}$ sont paires,

→ au moins une valeur de l'ensemble $\{b_2, b_3, b_4\}$ est un multiple de 4.

Quelques questions ouvertes...

Complexité de déterminer si un graphe est wAP+1 ? sAP+1 ?

Quelques questions ouvertes...

Complexité de déterminer si un graphe est wAP+1 ? sAP+1 ?

Existe-t-il des 4-ballons sAP+1 ?

Quelques questions ouvertes...

Complexité de déterminer si un graphe est wAP+1 ? sAP+1 ?

Existe-t-il des 4-ballons sAP+1 ?

Peut-on trouver des conditions nécessaires/suffisantes plus générales garantissant qu'un graphe soit wAP+1 ? sAP+1 ?

Quelques questions ouvertes...

Complexité de déterminer si un graphe est wAP+1 ? sAP+1 ?

Existe-t-il des 4-ballons sAP+1 ?

Peut-on trouver des conditions nécessaires/suffisantes plus générales garantissant qu'un graphe soit wAP+1 ? sAP+1 ?

Et si l'on impose davantage de restrictions ?

Références

P. Flajolet and R. Sedgewick.
Analytic combinatorics.
Cambridge University Press, 2009.

E. Gyori.
On division of graphs to connected subgraphs.
In *Combinatorics*, pages 485–494, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 18, 1978.

L. Lovász.
A homology theory for spanning trees of a graph.
Acta mathematica academiae scientiarum Hungaricae, 30(3-4) :241–251, 1977.

M. Robson.
Communication privée, 1998.

Conclusions

Merci pour votre attention !

Des questions ?