Complexité de partitionner un graphe en quelques sous-graphes connexes

J. Bensmail

LaBRI - Université de Bordeaux
Talence, France

JGA 2012
15 Novembre 2012

Définition du problème

Soit G un graphe. Une séquence $\tau = (n_1, ..., n_p)$ dont la somme des éléments vaut $|V(G)|$ est *réalisable dans G* s'il existe une partition $(V_1, ..., V_p)$ de $V(G)$ telle que $G[V_i]$ soit un graphe connexe d'ordre n_i pour tout $i \in \{1, ..., p\}$. Cette partition est une *réalisation de τ dans G*.

On ne s'intéresse ici qu'à des séquences formant une partition de l'ordre du graphe considéré.

Définition du problème

Soit G un graphe. Une séquence $\tau = (n_1, ..., n_p)$ dont la somme des éléments vaut $|V(G)|$ est *réalisable dans G* s'il existe une partition $(V_1, ..., V_p)$ de $V(G)$ telle que $G[V_i]$ soit un graphe connexe d'ordre n_i pour tout $i \in \{1, ..., p\}$. Cette partition est une *réalisation de τ dans G*.

On ne s'intéresse ici qu'à des séquences formant une partition de l'ordre du graphe considéré.

Le problème de décision nous intéressant est le suivant.

Séquence Réalisable - RealSeq
Instance : Un graphe G et une séquence τ.
Question : τ est-elle réalisable dans G ?

A propos de RealSeq

Il est déjà connu que le problème RealSeq est NP-complet, même sous les restrictions suivantes :

- $\tau = (\lambda, ..., \lambda)$, où $\lambda \geq 3$ est un diviseur de $|V(G)|$ [DF85] ;
- G est un arbre de degré maximum 3 [BF06].

Cependant, les réductions employées ne permettent pas de déduire l'existence d'un seuil constant $t \geq 1$ tel que le problème suivant

Séquence Réalisable de taille k - k-RealSeq
Instance : Un graphe G et une séquence τ de taille k.
Question : τ est-elle réalisable dans G ?

soit dans P lorsque $k \leq t - 1$ et NP-complet sinon.

2-RealSeq est NP-complet

Partitionner un graphe G en un seul sous-graphe connexe est possible ssi G est connexe. 1-RealSeq est donc dans P et $t \geq 2$.

Le problème 2-RealSeq restreint aux arbres et aux graphes 2-connexes est dans P. On montre néanmoins qu'il est NP-complet en général, ce résultat impliquant que $t = 2$.

2-RealSeq est NP-complet

Partitionner un graphe G en un seul sous-graphe connexe est possible ssi G est connexe. 1-RealSeq est donc dans P et $t \geq 2$.

Le problème 2-RealSeq restreint aux arbres et aux graphes 2-connexes est dans P. On montre néanmoins qu'il est NP-complet en général, ce résultat impliquant que $t = 2$.

Théorème : 2-RealSeq est NP-complet.

Preuve : Étant donnée une réalisation potentielle R de τ dans G, on peut facilement vérifier que celle-ci est correcte en temps polynomial. 2-RealSeq est donc dans NP.

2-RealSeq est NP-complet

Partitionner un graphe G en un seul sous-graphe connexe est possible ssi G est connexe. 1-RealSeq est donc dans P et $t \geq 2$.

Le problème 2-RealSeq restreint aux arbres et aux graphes 2-connexes est dans P. On montre néanmoins qu'il est NP-complet en général, ce résultat impliquant que $t = 2$.

Théorème : 2-RealSeq est NP-complet.

Preuve : Étant donnée une réalisation potentielle R de τ dans G, on peut facilement vérifier que celle-ci est correcte en temps polynomial. 2-RealSeq est donc dans NP.

On montre maintenant que 2-RealSeq est complet dans NP par réduction depuis 1-in-3 SAT.

Complétude de 2-RealSeq dans NP

1-in-3 SAT
Instance : Une formule F de variables $x_1, ..., x_n$ et de clauses $C_1, ..., C_m$.
Question : F est-elle satisfiable de manière 1-dans-3, c'est-à-dire de sorte que chacune de ses clauses ait exactement un litéral vrai ?

Notons que l'on peut supposer que tout litéral apparaît dans F : si x_i n'apparaît pas dans F, alors

$$F' = F \wedge (x_i \vee \overline{x_i} \vee x_{n+1}) \wedge (x_{n+1} \vee \overline{x_{n+1}} \vee x_{n+1})$$

est satisfiable de manière 1-dans-3 ssi F l'est aussi.

Complétude de 2-$\textsc{RealSeq}$ dans NP

1-in-3 SAT
Instance : Une formule F de variables $x_1, ..., x_n$ et de clauses $C_1, ..., C_m$.
Question : F est-elle satisfiable de manière 1-dans-3, c'est-à-dire de sorte que chacune de ses clauses ait exactement un litéral vrai ?

Notons que l'on peut supposer que tout litéral apparaît dans F : si x_i n'apparaît pas dans F, alors

$$F' = F \wedge (x_i \vee \overline{x_i} \vee x_{n+1}) \wedge (x_{n+1} \vee \overline{x_{n+1}} \vee x_{n+1})$$

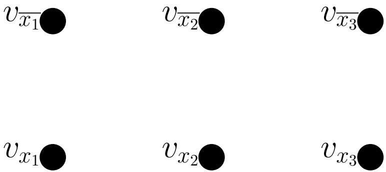
est satisfiable de manière 1-dans-3 ssi F l'est aussi.

Depuis une formule F, on construit alors un graphe G_F et une séquence $\tau = (n_1, n_2)$ avec $n_1, n_2 \geq 2$ tels que

F est satisfiable de manière 1-dans-3
$\Leftrightarrow$
τ est réalisable dans G_F.

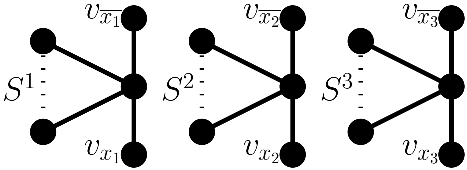
Réduction de 1-IN-3 SAT à 2-REALSEQ

On commence par construire le *sous-graphe de clauses de G_F* en associant à chaque litéral l_i de F un *sommet litéral* v_{l_i} dans G_F.



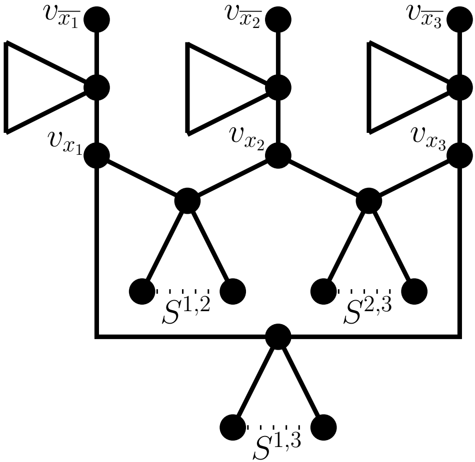
Réduction de 1-IN-3 SAT à 2-REALSEQ

Toute paire de sommets litéraux v_{l_i} et $v_{\overline{l_i}}$ est liée à la racine d'une étoile S^i à n sommets de degré 1.



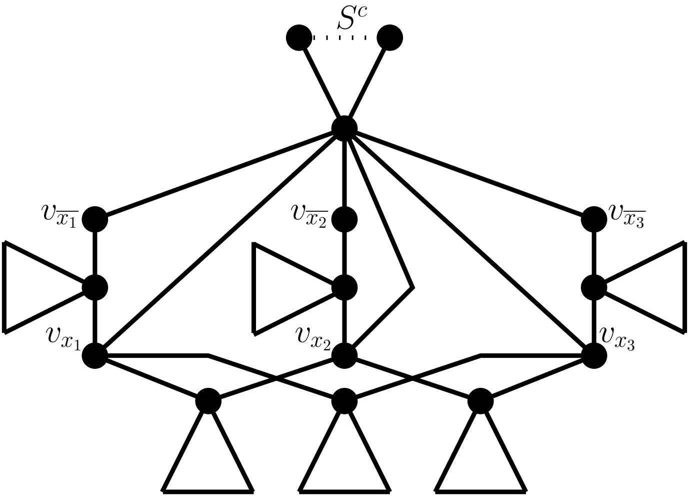
Réduction de 1-IN-3 SAT à 2-REALSEQ

Deux sommets litéraux v_{l_i} et v_{l_j} non assimilés à une variable de F et sa négation sont également reliés par la racine d'une étoile $S^{i,j}$ à n sommets de degré 1 si l_i et l_j apparaissent dans une même clause de F.



Réduction de 1-IN-3 SAT à 2-REALSEQ

Pour assurer la connexité de la structure obtenue, on lie tous les sommets litéraux de G_F à la racine d'une nouvelle étoile S^c à n sommets de degré 1.

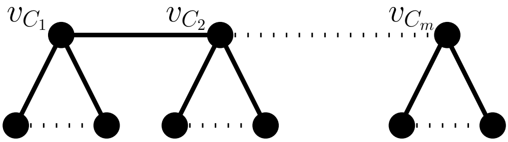


Réduction de 1-IN-3 SAT à 2-REALSEQ

Notons n_2 l'ordre du sous-graphe de clauses. Nous avons alors

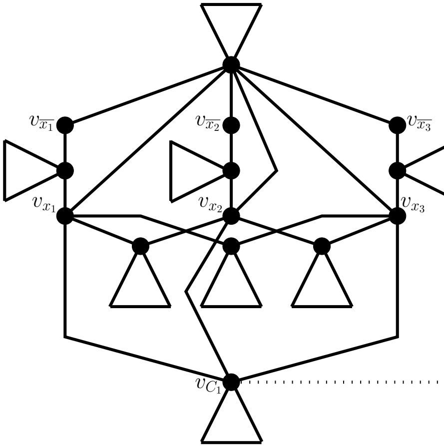
$$n_2 \leq 2n + n(n+1) + 3m(n+1) + n + 1.$$

On finit la construction de G_F en l'augmentant d'un *sous-graphe de base*. Celui-ci est obtenu en ajoutant, pour chaque clause C_i de F, un *sommet clause v_{C_i}* à G_F rattaché en étoile à $n_2 - n$ sommets de degré 1. Les sommets clauses sont ensuite reliés de sorte que $v_{C_1} \dots v_{C_m}$ soit une chaîne.



Réduction de 1-IN-3 SAT à 2-REALSEQ

On relie finalement les sous-graphes de clauses et de base de G_F de la manière suivante : si $C_i = (l_{i_1} \vee l_{i_2} \vee l_{i_3})$ est une clause de F, alors $v_{C_i}v_{l_{i_1}}$, $v_{C_i}v_{l_{i_2}}$ et $v_{C_i}v_{l_{i_3}}$ sont des arêtes de G_F.



Réduction de 1-IN-3 SAT à 2-REALSEQ

Soit n_1 le nombre de sommets du sous-graphe de base. On a alors

$$n_1 = m(n_2 - n + 1)$$

et $|V(G_F)| = n_1 + n_2$. Finalement, posons $\tau = (n_1 + n, n_2 - n)$.

Réduction de 1-IN-3 SAT à 2-REALSEQ

Soit n_1 le nombre de sommets du sous-graphe de base. On a alors

$$n_1 = m(n_2 - n + 1)$$

et $|V(G_F)| = n_1 + n_2$. Finalement, posons $\tau = (n_1 + n, n_2 - n)$.

On a $n_1 + n, n_2 - n \geq 2$. Ainsi, si dans une réalisation de τ dans G_F une part contient la racine d'une étoile, alors cette part doit également contenir tous les sommets de degré 1 de cette étoile.

Pour cette raison, dans une réalisation (V_1, V_2) de τ dans G_F, le sous-graphe de base de G_F doit être couvert par la part V_1 de taille $n_1 + n$. Il reste donc à ajouter n sommets du sous-graphe de clauses à V_1 pour compléter cette part.

Réduction de 1-IN-3 SAT à 2-REALSEQ

Puisque le sous-graphe de clauses est composé uniquement de sommets litéraux et d'étoiles à n sommets de degré 1, on doit choisir n sommets litéraux. Mais cela doit être fait sans déconnecter le sous-graphe de clauses puisque $V_2 = V(G_F) - V_1$. En particulier, on ne peut choisir deux sommets litéraux entre lesquels se trouve une étoile.

Ainsi, mettre un sommet litéral v_{l_i} de G_F dans V_1 simule une assignation de l_i à vrai. En particulier, on ne peut pas mettre l_i et $\overline{l_i}$ vrais simultanément, pas plus que deux litéraux l_i et l_j apparaissant dans une même clause de F. On peut donc déduire une correcte assignation 1-dans-3 des variables de F depuis une réalisation de τ dans G_F et vice-versa. ∎

Réduction de 1-IN-3 SAT à k-REALSEQ pour $k \geq 3$

On montre maintenant que $t = 2$ est le seuil constant mentionné plus tôt.

Théorème : k-REALSEQ est NP-complet pour tout $k \geq 3$.

Preuve : k-REALSEQ est dans NP pour tout $k \geq 3$ grâce au même certificat que précédemment. En guise d'exemple, on montre désormais comment adapter la réduction de 1-IN-3 SAT à 2-REALSEQ pour montrer que 3-REALSEQ est NP-complet.

Depuis une formule F, on construit un graphe G_F et une séquence $\tau = (n_1, n_2, n_3)$ avec $n_1, n_2, n_3 \geq 2$ tels que

$$F \text{ est satisfiable de manière 1-dans-3} \\ \Leftrightarrow \\ \tau \text{ est realisable dans } G_F.$$

Réduction de 1-IN-3 SAT à 3-REALSEQ

Grâce à la réduction précédente, on obtient un graphe G'_F et une séquence $\tau' = (n'_1, n'_2)$ avec $n'_1, n'_2 \geq 2$ tels que

$$F \text{ est satisfiable de manière 1-dans-3}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\tau' \text{ est realisable dans } G'_F.$$

Réduction de 1-IN-3 SAT à 3-REALSEQ

Grâce à la réduction précédente, on obtient un graphe G'_F et une séquence $\tau' = (n'_1, n'_2)$ avec $n'_1, n'_2 \geq 2$ tels que

$$F \text{ est satisfiable de manière 1-dans-3} \\ \Leftrightarrow \\ \tau' \text{ est realisable dans } G'_F.$$

Le graphe G_F est alors obtenu de la manière suivante :

- considérer l'union disjointe de G'_F et d'une étoile à $n'_1 + n'_2$ sommets de degré 1 dont la racine est dénotée r ;
- ajouter une arête entre un sommet quelconque de G'_F et r.

Réduction de 1-in-3 SAT à 3-RealSeq

Enfin, soit $\tau = (n'_1 + n'_2 + 1, n'_1, n'_2)$. Dans une réalisation de τ dans G_F, l'étoile ajoutée doit être couverte par la part de taille $n'_1 + n'_2 + 1$ pour les mêmes raisons que précédemment et car $n'_1, n'_2 \geq 2$.

Ainsi τ est réalisable dans G_F ssi τ' est réalisable dans G'_F. Le résultat de complétude suit alors par transitivité. ■

Réduction de 1-IN-3 SAT à 3-REALSEQ

Enfin, soit $\tau = (n'_1 + n'_2 + 1, n'_1, n'_2)$. Dans une réalisation de τ dans G_F, l'étoile ajoutée doit être couverte par la part de taille $n'_1 + n'_2 + 1$ pour les mêmes raisons que précédemment et car $n'_1, n'_2 \geq 2$.

Ainsi τ est réalisable dans G_F ssi τ' est réalisable dans G'_F. Le résultat de complétude suit alors par transitivité. ∎

Cette transformation de G_F et de τ peut ensuite être répétée autant de fois que souhaité pour montrer que k-REALSEQ est NP-complet pour tout $k \geq 4$.

Réduction de 1-IN-3 SAT à 3-RealSeq

Enfin, soit $\tau = (n'_1 + n'_2 + 1, n'_1, n'_2)$. Dans une réalisation de τ dans G_F, l'étoile ajoutée doit être couverte par la part de taille $n'_1 + n'_2 + 1$ pour les mêmes raisons que précédemment et car $n'_1, n'_2 \geq 2$.

Ainsi τ est réalisable dans G_F ssi τ' est réalisable dans G'_F. Le résultat de complétude suit alors par transitivité. ■

Cette transformation de G_F et de τ peut ensuite être répétée autant de fois que souhaité pour montrer que k-RealSeq est NP-complet pour tout $k \geq 4$.

Merci pour votre attention !

Bibliographie

J. Bensmail.
On the computational complexity of partitioning a graph into a few connected subgraphs.
Rapport Technique, 2012.

D. Barth and H. Fournier.
A degree bound on decomposable trees.
Discret. Math., 306(5) :469–477, 2006.

M.E. Dyer and A.M. Frieze.
On the complexity of partitioning graphs into connected subgraphs.
Discret. Appl. Math., 10 :139–153, 1985.