Préaffectation de sommets dans les graphes arbitrairement partitionnables

Julien Bensmail

Université Bordeaux 1

21 juin 2011

Définition formelle de la partition arbitraire

Séquence admissible :

- Une séquence $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ est un multi-ensemble d'entiers positifs.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. τ est dite *admissible pour n* si $\sum_{i=1}^{k} \tau_i = n$.

Définition formelle de la partition arbitraire

Séquence admissible :

- Une séquence $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ est un multi-ensemble d'entiers positifs.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. τ est dite *admissible pour n* si $\sum_{i=1}^{k} \tau_i = n$.

Séquence réalisable, graphe arbitrairement partitionnable :

- On considère un graphe $G = (V, E)$ non orienté, connexe, et simple.
- Une séquence $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ admissible pour $|V|$ est *réalisable dans G* s'il existe une partition $(V_1, \ldots, V_k)$ de V telle que $G[V_i]$ soit connexe et d'ordre τ_i, $\forall i \in [1, k]$.

Définition formelle de la partition arbitraire

Séquence admissible :

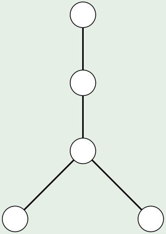
- Une séquence $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ est un multi-ensemble d'entiers positifs.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. τ est dite *admissible pour n* si $\sum_{i=1}^{k} \tau_i = n$.

Séquence réalisable, graphe arbitrairement partitionnable :

- On considère un graphe $G = (V, E)$ non orienté, connexe, et simple.
- Une séquence $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ admissible pour $|V|$ est *réalisable dans G* s'il existe une partition $(V_1, \ldots, V_k)$ de V telle que $G[V_i]$ soit connexe et d'ordre τ_i, $\forall i \in [1, k]$.
- G est *arbitrairement partitionnable* (AP) si toute séquence admissible pour son ordre y est réalisable.

Deux exemples

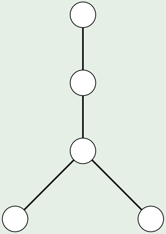
Un exemple de graphe AP :



$P(1,1,2)$ AP ?

Deux exemples

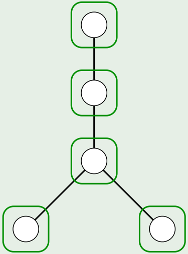
Un exemple de graphe AP :



$P(1,1,2)$ AP ?
$\tau_1 = (1,1,1,1,1)$?

Deux exemples

Un exemple de graphe AP :

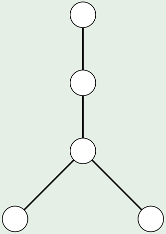


$P(1, 1, 2)$ AP ?

$\tau_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$? Ok !

Deux exemples

Un exemple de graphe AP :

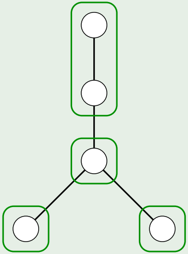


$P(1,1,2)$ AP ?

$\tau_2 = (1,1,1,2)$?

Deux exemples

Un exemple de graphe AP :

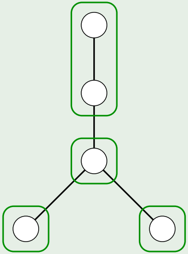


$P(1,1,2)$ AP ?

$\tau_2 = (1,1,1,2)$? Ok !

Deux exemples

Un exemple de graphe AP :

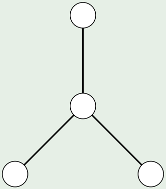


$P(1,1,2)$ AP ?
$\tau_2 = (1,1,1,2)$? Ok !

Et ainsi de suite pour les sept partitions de 5...

Deux exemples

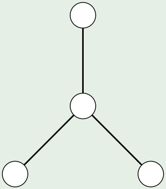
Un exemple de graphe non AP :



$P(1,1,1)$ AP ?

Deux exemples

Un exemple de graphe non AP :

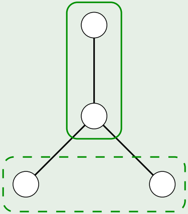


$P(1,1,1)$ AP ?

$\tau = (2,2)$ réalisable ?

Deux exemples

Un exemple de graphe non AP :

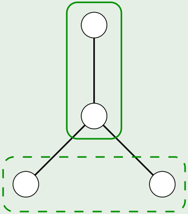


$P(1,1,1)$ AP ?

$\tau = (2,2)$ réalisable ? Non !

Deux exemples

Un exemple de graphe non AP :



$P(1,1,1)$ AP ?
$\tau = (2,2)$ réalisable ? Non !

Ce graphe n'est pas AP !

Intérêts de la partition arbitraire

La partition arbitraire d'un graphe est très utile. . .

- Analogie avec un problème d'attribution de sous-réseaux.
- Tout graphe AP admet un couplage parfait (ou quasi-parfait).
- Tout graphe traçable est AP.

Intérêts de la partition arbitraire

La partition arbitraire d'un graphe est très utile...

- Analogie avec un problème d'attribution de sous-réseaux.
- Tout graphe AP admet un couplage parfait (ou quasi-parfait).
- Tout graphe traçable est AP.

...mais difficile à déterminer !

- Savoir si une séquence est réalisable dans un graphe est NP-complet [Rob98].
- Le nombre de partitions d'un entier est exponentiel en sa taille [FS09].

À propos des arbres AP

De nombreux travaux ont été consacrés aux arbres :

- La "simplicité" de leur structure y facilite la réalisation de séquences.

À propos des arbres AP

De nombreux travaux ont été consacrés aux arbres :

- La “simplicité” de leur structure y facilite la réalisation de séquences.
- La partition arbitraire est close par ajout d’arêtes...
- ... ce qui constitue une bonne méthode pour obtenir des graphes AP !

À propos des arbres AP

De nombreux travaux ont été consacrés aux arbres :

- La "simplicité" de leur structure y facilite la réalisation de séquences.
- La partition arbitraire est close par ajout d'arêtes...
- ...ce qui constitue une bonne méthode pour obtenir des graphes AP !

Le degré maximum de ces arbres est majoré :

Théorème (Barth et Fournier, 2006) [BF06] :

Soit T un arbre. Si T est AP, alors $\Delta(T) \leq 4$. De plus, tout nœud de degré 4 de T possède une feuille dans son voisinage.

À propos des arbres AP

De nombreux travaux ont été consacrés aux arbres :

- La "simplicité" de leur structure y facilite la réalisation de séquences.
- La partition arbitraire est close par ajout d'arêtes...
- ...ce qui constitue une bonne méthode pour obtenir des graphes AP !

Le degré maximum de ces arbres est majoré :

Théorème (Barth et Fournier, 2006) [BF06] :

Soit T un arbre. Si T est AP, alors $\Delta(T) \leq 4$. De plus, tout nœud de degré 4 de T possède une feuille dans son voisinage.

Malheureusement, cette construction ne permet pas d'obtenir l'intégralité des graphes AP [BGW10].

Variantes de la partition arbitraire

Plusieurs versions fortes de la partition arbitraire ont été introduites [HTW07, BGW10], ajoutant des contraintes sur la réalisation R de τ dans G :

- Version "à la volée" (OL-AP) : les sous-ensembles de R doivent être choisis au fur et à mesure que les éléments de τ sont dévoilés.

Variantes de la partition arbitraire

Plusieurs versions fortes de la partition arbitraire ont été introduites [HTW07, BGW10], ajoutant des contraintes sur la réalisation R de τ dans G :

- Version "à la volée" (OL-AP) : les sous-ensembles de R doivent être choisis au fur et à mesure que les éléments de τ sont dévoilés.
- Version récursive (R-AP) : les sous-ensembles de R doivent induire des sous-graphes R-AP eux-mêmes ou isomorphes à K_1.

Variantes de la partition arbitraire

Plusieurs versions fortes de la partition arbitraire ont été introduites [HTW07, BGW10], ajoutant des contraintes sur la réalisation R de τ dans G :

- Version "à la volée" (OL-AP) : les sous-ensembles de R doivent être choisis au fur et à mesure que les éléments de τ sont dévoilés.
- Version récursive (R-AP) : les sous-ensembles de R doivent induire des sous-graphes R-AP eux-mêmes ou isomorphes à K_1.

Il existe une relation entre toutes ces versions :

Théorème (Baudon, Gilbert et Woźniak, 2010) [BGW10] :

$$PM(n) \supsetneq AP(n) \supsetneq OL\text{-}AP(n) \supsetneq R\text{-}AP(n) \supsetneq Traceable(n)$$

Variantes de la partition arbitraire

Plusieurs versions fortes de la partition arbitraire ont été introduites [HTW07, BGW10], ajoutant des contraintes sur la réalisation R de τ dans G :

- Version “à la volée” (OL-AP) : les sous-ensembles de R doivent être choisis au fur et à mesure que les éléments de τ sont dévoilés.
- Version récursive (R-AP) : les sous-ensembles de R doivent induire des sous-graphes R-AP eux-mêmes ou isomorphes à K_1.

Il existe une relation entre toutes ces versions :

Théorème (Baudon, Gilbert et Woźniak, 2010) [BGW10] :

$$PM(n) \supsetneq AP(n) \supsetneq OL\text{-}AP(n) \supsetneq R\text{-}AP(n) \supsetneq Traceable(n)$$

De là, une bonne alternative pour vérifier la partition arbitraire d'un graphe consiste à montrer qu'il est “plus qu'AP”.

Intérêts de la préaffectation d'un sommet

Observons qu'il peut exister plusieurs réalisations d'une même séquence $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ dans un graphe G.

Mais étant donné un sommet arbitraire v de G, peut-on toujours en trouver une dont le sous-ensemble de taille τ_i contient v ?

Intérêts de la préaffectation d'un sommet

Observons qu'il peut exister plusieurs réalisations d'une même séquence $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ dans un graphe G.

Mais étant donné un sommet arbitraire v de G, peut-on toujours en trouver une dont le sous-ensemble de taille τ_i contient v ?

Plusieurs enjeux derrière cette question :

- Enrichissement du problème d'attribution de sous-réseaux.

Intérêts de la préaffectation d'un sommet

Observons qu'il peut exister plusieurs réalisations d'une même séquence $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ dans un graphe G.

Mais étant donné un sommet arbitraire v de G, peut-on toujours en trouver une dont le sous-ensemble de taille τ_i contient v ?

Plusieurs enjeux derrière cette question :

- Enrichissement du problème d'attribution de sous-réseaux.
- Version forte de la partition arbitraire.

Intérêts de la préaffectation d'un sommet

Observons qu'il peut exister plusieurs réalisations d'une même séquence $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ dans un graphe G.

Mais étant donné un sommet arbitraire v de G, peut-on toujours en trouver une dont le sous-ensemble de taille τ_i contient v ?

Plusieurs enjeux derrière cette question :

- Enrichissement du problème d'attribution de sous-réseaux.
- Version forte de la partition arbitraire.
- Meilleure compréhension du processus de réalisation d'une séquence.

Formalisation de la notion de préaffectation d'un sommet

Fixabilité d'un sommet :

Soient G un graphe, v l'un de ses sommets, et $q \leq n - 1$ un entier. v est dit *q-fixable dans G* s'il existe un sous-ensemble $S_q \subset V$ tel que $v \in S_q$, $G[S_q]$ soit connexe d'ordre q, et $G[V \setminus S_q]$ soit AP.

Formalisation de la notion de préaffectation d'un sommet

Fixabilité d'un sommet :

Soient G un graphe, v l'un de ses sommets, et $q \leq n-1$ un entier. v est dit *q-fixable dans G* s'il existe un sous-ensemble $S_q \subset V$ tel que $v \in S_q$, $G[S_q]$ soit connexe d'ordre q, et $G[V \setminus S_q]$ soit AP.

Notons qu'un graphe possédant un sommet q-fixable pour tout $q \in [1, n-1]$ est arbitrairement partitionnable.

Formalisation de la notion de préaffectation d'un sommet

Fixabilité d'un sommet :

Soient G un graphe, v l'un de ses sommets, et $q \leq n-1$ un entier. v est dit *q-fixable dans G* s'il existe un sous-ensemble $S_q \subset V$ tel que $v \in S_q$, $G[S_q]$ soit connexe d'ordre q, et $G[V \setminus S_q]$ soit AP.

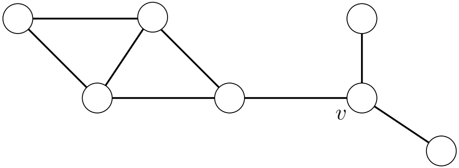
Notons qu'un graphe possédant un sommet q-fixable pour tout $q \in [1, n-1]$ est arbitrairement partitionnable.

Graphe arbitrairement partitionnable avec une préaffectation :

G est *arbitrairement partitionnable avec une préaffectation* (AP+1) si chacun de ses sommets y est q-fixable pour tout $q \in [1, n-1]$.

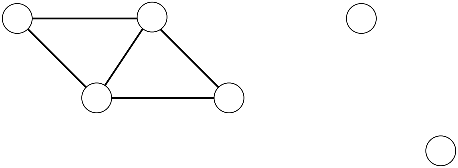
Connexité des graphes AP+1

Remarquons que tout sommet d'articulation n'est pas 1-fixable.



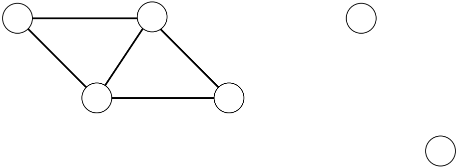
Connexité des graphes AP+1

Remarquons que tout sommet d'articulation n'est pas 1-fixable.



Connexité des graphes AP+1

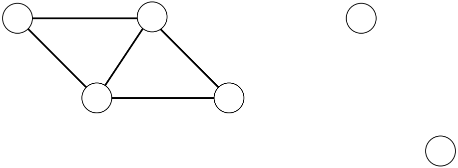
Remarquons que tout sommet d'articulation n'est pas 1-fixable.



Les graphes AP+1 sont donc biconnexes !

Connexité des graphes AP+1

Remarquons que tout sommet d'articulation n'est pas 1-fixable.



Les graphes AP+1 sont donc biconnexes !

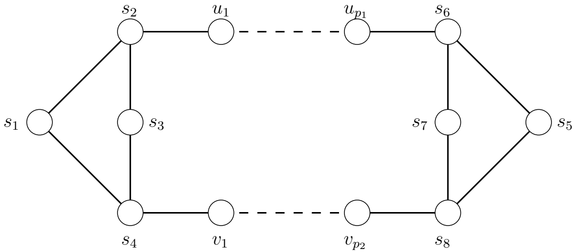
Problème : nous connaissons peu de choses sur les graphes AP 2-connexes. . .

Graphes AP+1 mis en évidence

- Les graphes hamiltoniens le sont trivialement.

Graphes AP+1 mis en évidence

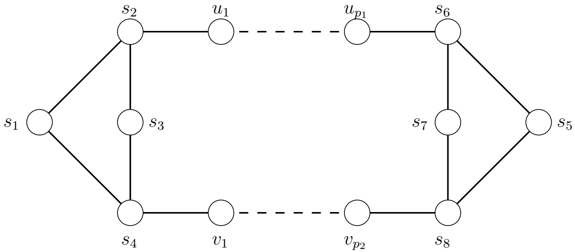
- Les graphes hamiltoniens le sont trivialement.
- Introduction de la classe des cylindres :



Le cylindre $C(p_1, p_2)$

Graphes AP+1 mis en évidence

- Les graphes hamiltoniens le sont trivialement.
- Introduction de la classe des cylindres :



Le cylindre $C(p_1, p_2)$

Proposition :

Soit $p \geq 1$ un entier. Le cylindre $C(p, p)$ est AP+1 ssi p est pair.

Relation avec les autres versions de la partition arbitraire

Certains liens sont simples à expliciter :

Relation avec les autres versions de la partition arbitraire

Certains liens sont simples à expliciter :

$\rightarrow$ Relation avec *AP(n)* :

- *AP+1(n)* $\subsetneq$ *AP(n)*

Relation avec les autres versions de la partition arbitraire

Certains liens sont simples à expliciter :

$\rightarrow$ Relation avec *AP(n)* :

- $AP{+}1(n) \subsetneq AP(n)$

$\rightarrow$ Relation avec *Traceable(n)* :

- $Traceable(n) \cap AP{+}1(n) \neq \emptyset$

Relation avec les autres versions de la partition arbitraire

Certains liens sont simples à expliciter :

$\rightarrow$ Relation avec *AP(n)* :

- $AP{+}1(n) \subsetneq AP(n)$

$\rightarrow$ Relation avec *Traceable(n)* :

- $Traceable(n) \cap AP{+}1(n) \neq \emptyset$
- $Traceable(n) \not\subset AP{+}1(n) \neq \emptyset$

Relation avec les autres versions de la partition arbitraire

Certains liens sont simples à expliciter :

→ Relation avec *AP(n)* :

- $AP{+}1(n) \subsetneq AP(n)$

→ Relation avec *Traceable(n)* :

- $Traceable(n) \cap AP{+}1(n) \neq \emptyset$
- $Traceable(n) \not\subset AP{+}1(n) \neq \emptyset$
- $AP{+}1(n) \not\subset Traceable(n) \neq \emptyset$

Relation avec les autres versions de la partition arbitraire

$\rightarrow$ Relation avec *OL-AP(n) et R-AP(n)* :

- *OL-AP(n)* $\cap$ *AP+1(n)* $\neq \emptyset$, *OL-AP(n)* $\not\subset$ *AP+1(n)*
- *R-AP(n)* $\cap$ *AP+1(n)* $\neq \emptyset$, *R-AP(n)* $\not\subset$ *AP+1(n)*

Relation avec les autres versions de la partition arbitraire

$\rightarrow$ Relation avec *OL-AP(n) et R-AP(n)* :

- $OL\text{-}AP(n) \cap AP{+}1(n) \neq \emptyset$, $OL\text{-}AP(n) \not\subset AP{+}1(n)$
- $R\text{-}AP(n) \cap AP{+}1(n) \neq \emptyset$, $R\text{-}AP(n) \not\subset AP{+}1(n)$

Tous les graphes AP+1 que nous connaissons sont R-AP ; de là :

- $AP{+}1(n) \subset R\text{-}AP(n)$?
- $AP{+}1(n) \subset OL\text{-}AP(n)$?
- $AP{+}1(n) \not\subset OL\text{-}AP(n)$?

Relation avec les autres versions de la partition arbitraire

$\rightarrow$ Relation avec *OL-AP(n) et R-AP(n)* :

- *OL-AP(n)* $\cap$ *AP+1(n)* $\neq \emptyset$, *OL-AP(n)* $\not\subset$ *AP+1(n)*
- *R-AP(n)* $\cap$ *AP+1(n)* $\neq \emptyset$, *R-AP(n)* $\not\subset$ *AP+1(n)*

Tous les graphes AP+1 que nous connaissons sont R-AP ; de là :

- *AP+1(n)* $\subset$ *R-AP(n)* ?
- *AP+1(n)* $\subset$ *OL-AP(n)* ?
- *AP+1(n)* $\not\subset$ *OL-AP(n)* ?

Difficile à déterminer à cause de la biconnexité des graphes AP+1...

À propos de la classe des ballons

Les ballons potentiellement AP+1 possèdent au plus quatre branches :

À propos de la classe des ballons

Les ballons potentiellement AP+1 possèdent au plus quatre branches :

- les 2-ballons le sont tous (isomorphes aux cycles) ;

À propos de la classe des ballons

Les ballons potentiellement AP+1 possèdent au plus quatre branches :

- les 2-ballons le sont tous (isomorphes aux cycles) ;
- les 3-ballons ne le sont pas tous ;

À propos de la classe des ballons

Les ballons potentiellement AP+1 possèdent au plus quatre branches :

- les 2-ballons le sont tous (isomorphes aux cycles) ;
- les 3-ballons ne le sont pas tous ;
- quid des 4-ballons ?

À propos de la classe des ballons

Les ballons potentiellement AP+1 possèdent au plus quatre branches :

- les 2-ballons le sont tous (isomorphes aux cycles) ;
- les 3-ballons ne le sont pas tous ;
- quid des 4-ballons ?

Théorème :

Si le 4-ballon $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$ est AP+1, alors :

- $b_1 = 1$,
- $P(1, b, c, d)$ est AP,
- $P(b, c, d)$ est AP,
- $\mathrm{pgcd}(b+1, c+d+1) = 1$, $\mathrm{pgcd}(c+1, b+d+1) = 1$, et $\mathrm{pgcd}(d+1, b+c+1) = 1$,
- au moins deux valeurs de l'ensemble $\{b, c, d\}$ sont paires,
- au moins une valeur de l'ensemble $\{b, c, d\}$ est un multiple de 4.

À propos de la classe des ballons

Les ballons potentiellement AP+1 possèdent au plus quatre branches :

- les 2-ballons le sont tous (isomorphes aux cycles) ;
- les 3-ballons ne le sont pas tous ;
- quid des 4-ballons ?

Théorème :

Si le 4-ballon $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$ est AP+1, alors :

- $b_1 = 1$,
- $P(1, b, c, d)$ est AP,
- $P(b, c, d)$ est AP,
- $\mathrm{pgcd}(b+1, c+d+1) = 1$, $\mathrm{pgcd}(c+1, b+d+1) = 1$, et $\mathrm{pgcd}(d+1, b+c+1) = 1$,
- au moins deux valeurs de l'ensemble $\{b, c, d\}$ sont paires,
- au moins une valeur de l'ensemble $\{b, c, d\}$ est un multiple de 4.

On ne sait toujours pas si un 4-ballon AP+1 existe réellement...

Ce qu'on a étudié

$\rightarrow$ Partition arbitraire avec préaffectation de sommets :

Ce qu'on a étudié

$\rightarrow$ Partition arbitraire avec préaffectation de sommets :

- Bonne première idée des graphes AP+1.

Ce qu'on a étudié

$\rightarrow$ Partition arbitraire avec préaffectation de sommets :

- Bonne première idée des graphes AP+1.
- Généralisation : définitions et premières caractéristiques (non abordé).

Ce qu'on a étudié

$\rightarrow$ Partition arbitraire avec préaffectation de sommets :

- Bonne première idée des graphes AP+1.
- Généralisation : définitions et premières caractéristiques (non abordé).
- Une classe de graphes AP+2 (non abordé).

Ce qu'on a étudié

$\rightarrow$ Partition arbitraire avec préaffectation de sommets :

- Bonne première idée des graphes AP+1.
- Généralisation : définitions et premières caractéristiques (non abordé).
- Une classe de graphes AP+2 (non abordé).

$\rightarrow$ Partition arbitraire de $G \square P_l$ où G est AP (non abordé) :

Ce qu'on a étudié

→ Partition arbitraire avec préaffectation de sommets :

- Bonne première idée des graphes AP+1.
- Généralisation : définitions et premières caractéristiques (non abordé).
- Une classe de graphes AP+2 (non abordé).

→ Partition arbitraire de $G_\square P_l$ où G est AP (non abordé) :

Si G est ...	**Avancement actuel**
Traçable	Vrai pour tout l
AP+1	Vrai pour tout l
R-AP	Réalisation de τ si $\lvert\tau\rvert \geq l+1$
AP	Vrai pour tout $l \in [2,4]$

Ce qu'on a étudié

→ Partition arbitraire avec préaffectation de sommets :

- Bonne première idée des graphes AP+1.
- Généralisation : définitions et premières caractéristiques (non abordé).
- Une classe de graphes AP+2 (non abordé).

→ Partition arbitraire de $G_\square P_l$ où G est AP (non abordé) :

Si G est ...	**Avancement actuel**
Traçable	Vrai pour tout l
AP+1	Vrai pour tout l
R-AP	Réalisation de τ si $\lvert\tau\rvert \geq l+1$
AP	Vrai pour tout $l \in [2,4]$

→ Récursivité de la partition arbitraire de $G_\square P_l$ où G est R-AP (non abordé).

Ce qu'il reste à faire

$\rightarrow$ Situer précisément la place des graphes AP+1 dans la hiérarchie des versions.

Ce qu'il reste à faire

$\rightarrow$ Situer précisément la place des graphes AP+1 dans la hiérarchie des versions.

- Découvrir davantage de tels graphes.

Ce qu'il reste à faire

→ Situer précisément la place des graphes AP+1 dans la hiérarchie des versions.

- Découvrir davantage de tels graphes.
- Continuer l'étude des 4-ballons.

Ce qu'il reste à faire

$\rightarrow$ Situer précisément la place des graphes AP+1 dans la hiérarchie des versions.

- Découvrir davantage de tels graphes.
- Continuer l'étude des 4-ballons.
- Étudier la relation entre la biconnexité et la partition arbitraire.

Ce qu'il reste à faire

→ Situer précisément la place des graphes AP+1 dans la hiérarchie des versions.

- Découvrir davantage de tels graphes.
- Continuer l'étude des 4-ballons.
- Étudier la relation entre la biconnexité et la partition arbitraire.

→ Étendre nos résultats à la préaffectation de plusieurs sommets.

Ce qu'il reste à faire

→ Situer précisément la place des graphes AP+1 dans la hiérarchie des versions.

- Découvrir davantage de tels graphes.
- Continuer l'étude des 4-ballons.
- Étudier la relation entre la biconnexité et la partition arbitraire.

→ Étendre nos résultats à la préaffectation de plusieurs sommets.

→ Continuer à étudier la partition arbitraire du produit cartésien $G_\square P_l$.

Des questions ?

Des questions ?

Références

D. Barth and H. Fournier.
A degree bound on decomposable trees.
Discrete Mathematics, 306(5) :469–477, 2006.

O. Baudon, F. Gilbert, and M. Woźniak.
Recursively arbitrarily vertex-decomposable graphs.
Soumis à Discrete Mathematics, special issue 8th French Conference on Combinatorics, October 2010.

P. Flajolet and R. Sedgewick.
Analytic combinatorics.
Cambridge University Press, 2009.

M. Horňák, Z. Tuza, and M. Woźniak.
On-line arbitrarily vertex decomposable trees.
Discrete Applied Mathematics, 155 :1420–1429, 2007.

M. Robson.
Communication privée, 1998.